Sistemas T y T* como propuestas didáctico-pedagógicas para la comprensión de las nociones de consecuencia lógica, consistencia y decidibilidad en la Lógica

Claudio M. Conforti Carlomagno

"Primer Día Mundial de la Lógica"

Universidad de Salamaca-España

Citamos a Mara Manzano

"…la lógica puede ser definida como el estudio de la consecuencia; o lo que es lo mismo, como el estudio de los razonamientos válidos o correctos. Yo la caracterizo como el estudio de los conjuntos de creencias consistentes porque pienso que de esta forma es más fácil al comienzo y porque se sabe que los dos planteamientos son equivalentes, como puntualizo insistentemente en un curso de introducción."

Lógica Básica

Arboles lógicos para la lógica de enunciados. El sistema T

El sistema de árboles lógicos (también llamado “árboles analíticos”) que se expone a continuación ofrece un método de deducción y de decisión para la lógica de enunciados.

El sistema se basa en el método de refutación o de “búsqueda del contraejemplo”: una demostración formal en el sistema se interpreta como la imposibilidad de construir un contraejemplo para un razonamiento o enunciado en cuestión.

¿Qué es “contraejemplo” ?

Recuérdese que una forma de razonamiento es válida si carece de contraejemplo. Esto quiere decir que una forma de razonamiento es válida si no existe una interpretación de sus signos no lógicos, es decir, un caso concreto de esa forma de razonamiento, que haga a sus premisas verdaderas y a su conclusión falsa

Esta es una definición de validez para formas de razonamiento

Una forma de razonamiento es válida si no podemos encontrar un ejemplo de sustitución que tenga premisas verdaderas y conclusión falsa

Por lo tanto…

Por lo tanto, si se construye un contraejemplo (un “caso en contrario” de la forma), la forma de razonamiento es ***inválida***. Por el contrario, si resulta imposible construir tal contraejemplo, esta es ***válida***.

Los “árboles analíticos” o “tableaux semánticos”

Es una formulación ***puramente sintáctica*** (en términos de reglas formales) de métodos originalmente ***semánticos*** para determinar la validez de razonamientos deductivos. Estos métodos se basan en la ***caracterización de las conectivas*** por medio de la indicación de sus ***condiciones de verdad***.

Test de Consistencia

El sistema funciona primariamente como un “test de consistencia” para un conjunto de enunciados. La validez de un razonamiento surgirá de manera secundaria o indirecta, al mostrar que es inconsistente suponer la verdad de las premisas y la falsedad de la conclusión.

Cómo procede el Sistema T

El sistema procede además con reglas que descomponen los enunciados moleculares hasta llegar a sus componentes atómicos, y por esto se puede hablar de un análisis de enunciados. Este análisis se representa gráficamente mediante árboles, que tienen bifurcaciones o ramas. De allí el nombre del sistema

Sistema sencillo e interesante…

El sistema es particularmente interesante desde el punto de vista computacional y, además, resultará muy conveniente para analizar propiedades semánticas de la lógica enunciados (tales como corrección, completitud)

De dónde partimos…

La presentación seguirá en líneas generales del sistema que Richard Jeffrey formuló en su libro Lógica formal: su alcance y sus límites. Trad. cast. de Angel D´Ors, Pamplona, Eunsa, 1999. Este sistema se basa a su vez, en gran parte, en la obra de Raymond Smullyan First-Order Logic (First-Order Logic, Berlin - Heildelberg- N.York, Springer-Verlag, 1968, reimpresión: Nueva York, Dover, 1995), donde el sistema recibe el nombre de “tableaux analíticos”.

E Beth (1969)*

El primer uso de los árboles semánticos apareció en el trabajo de Beth (1969); más tarde Hintikka, Jeffrey, Smullyan, Fitting y otros desarrollaron el método en varias direcciones. Teniendo en cuenta el primer planteamiento mencionado, debemos poner de relieve que se trata de un procedimiento de refutación de base semántica.

“Semantic Entailment and Formal Derevability”

- Beth, E. W. (1969): “Semantic Entailment and Formal Derevability”, en J. Hintikka (ed.): The Philosophy of Mathematics, London, Oxford University Press. Versión en español “Entrañamiento semántico y derivabilidad formal”, Cuadernos Teorema núm. 18, 1978.

No podemos olvidar …

En español trata el tema magníficamente de los Tableaux Semánticos para Lógica de Enunciados y Lógica de Primer Orden, en los Capítulos 4 y 11 respectivamente, de su libro “Lógica para Principiantes” es la Dra. Mara Manzano

Las reglas se basan en las siguientes afirmaciones que se siguen de las condiciones de verdad de las conectivas:

Si un enunciado de la forma $(A \wedge B)$ es verdadero, entonces puede inferirse que tanto A como B son verdaderos.

Si un enunciado de la forma $(A \wedge B)$ es falso, entonces puede inferirse que A es falso o B es falso.

Si un enunciado de la forma $(A \vee B)$ es verdadero, entonces puede inferirse que A es verdadero o B es verdadero.

Si un enunciado de la forma $(A \vee B)$ es falso, entonces puede inferirse que tanto A como B son falsos.

Las reglas se basan en las siguientes afirmaciones que se siguen de las condiciones de verdad de las conectivas:

Si un enunciado de la forma $(A \rightarrow B)$ es verdadero, entonces puede inferirse que A es falso o B es verdadero.

Si un enunciado de la forma $(A \rightarrow B)$ es falso, entonces puede inferirse que A es verdadero y B es falso.

Si un enunciado de la forma $(A \leftrightarrow B)$ es verdadero, entonces puede inferirse que A y B son verdaderos o A y B son falsos.

Si un enunciado de la forma $(A \leftrightarrow B)$ es falso, entonces puede inferirse que A es verdadero y B es falso o A es falso y B verdadero.

Negación (¬)

Si un enunciado de la forma (¬A) es verdadero, entonces puede inferirse que A es falso.

Si un enunciado de la forma (¬A) es falso, entonces puede inferirse que A es verdadero.

Las condiciones para la negación van a tener una importancia especial

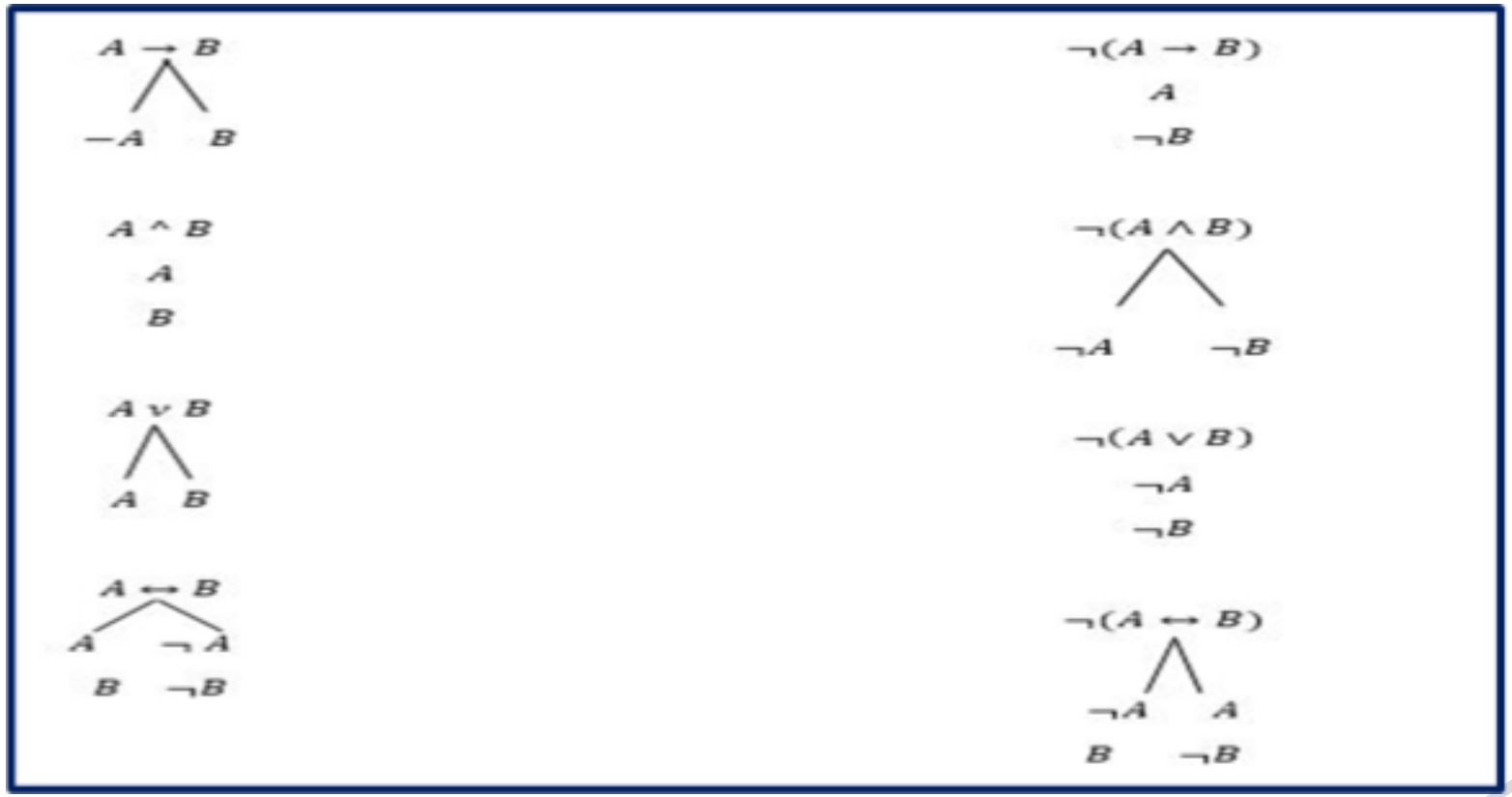
Dado que (¬A) es verdadero si y sólo si A es falso, la negación puede servir, adicionalmente, para expresar la falsedad. Esto es, si A es un enunciado verdadero, entonces ¬A (por convención sin paréntesis ahora) expresa que A es falso. Esto lleva a que el sistema tenga para cada conectiva, (exceptuando la negación) dos tipos de reglas: reglas de afirmación y reglas de negación.

Esto debemos tenerlo en cuenta porque es lo que nos va a permitir pasar a los "árboles analíticos etiquetados" que a mi juicio son "más intuitivos" para trabajar con alumnos no familiarizados con Lógica.

El Sistema T

El sistema de árboles lógicos T tiene reglas únicamente para las conectivas, de modo que es un sistema de deducción y de decisión para la lógica de enunciados y son las siguientes:

Reglas Según Jeffrey



Según Mara Manzano

α-reglas (α = ‘y’):

1. De $A \wedge B$, se deduce A y B.
2. De $\neg(A \vee B)$ se deduce $\neg A$ y $\neg B$.
3. De $\neg(A \rightarrow B)$, se deduce A y $\neg B$.
4. De $\neg\neg A$, se decuce A.

Según Mara Manzano

β-reglas (β = ‘ramificación’):

1. De $A \vee B$, se deduce A y, en una rama nueva, separada, B.
2. De $\neg(A \wedge B)$, se deduce $\neg A$ y, en una rama nueva, separada, $\neg B$.
3. De $A \rightarrow B$, se deduce $\neg A$ y, en una rama nueva, separada, B.

Regla de cierre de ramas

Esta regla da las condiciones para cerrar una rama. Si en una misma rama aparecen A y ¬A, entonces se dirá que la rama está cerrada, lo que se indica marcando con una x al extremo de la rama. En un sentido informal, el cierre de una rama significa que se ha hallado una inconsistencia (aceptando el supuesto de que un enunciado no puede ser verdadero y falso).

Los enunciados deben ser atómicos

El enunciado A debe ser atómico, ya que el sistema exige que se apliquen todas las reglas correspondientes a las conectivas que aparecen en enunciados. Es decir, tiene sentido aplicar la regla de cierre de rama únicamente en el caso en que los enunciados sean atómicos.

Reglas de verdad y reglas de falsedad

Como puede verse, para cada conectiva hay reglas de dos tipos: “reglas de verdad” (las de la izquierda) y “reglas de falsedad” (las de la derecha). La relación con las “reglas de verdad” (o condiciones de verdad para las constantes lógicas) preformales del parágrafo salta a la vista. Las reglas siempre descomponen o “analizan” las fórmulas en subfórmulas (se puede decir que “eliminan” la conectiva al que se aplican).

Recapitulando hasta aquí….

Así como las reglas se basan directamente en las condiciones de verdad para los signos lógicos, el método se basa también en la definición de razonamiento válido basada en el concepto de verdad: un razonamiento es válido si su forma correspondiente carece de contraejemplo. Más precisamente, se basará en ver si, en el caso de un razonamiento, el conjunto de enunciados formado por las premisas junto con la negación de la conclusión, o, en el caso de un único enunciado, el conjunto unitario formado por la negación del enunciado, es consistente. Si no lo es, esto significa que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas, o que el enunciado es consecuencia lógica del conjunto vacío

Puede decirse que el sistema de árboles es una transposición de conceptos semánticos a un método de derivación.

Una observación final: Obviamente las líneas que van indicando ramas y bifurcaciones no representan una inferencia lógica. Más bien, representa lo mínimo que se puede afirmar consistentemente a partir de los enunciados que están arriba de la línea.

Cuando aparece la x es que ya nada puede afirmarse con consistencia a partir de los enunciados enlazados en la rama.

Los conceptos de derivación y teorema en T se caracterizan del modo siguiente:

Un enunciado C de LE es derivable en T a partir de enunciados A1, ..., An de LE, si el árbol formado a partir de A1, ..., An y ¬C es un árbol cerrado.

Un enunciado C de LE es teorema en T, si el árbol formado a partir de ¬C es un árbol cerrado.

Validez de los razonamientos

Un razonamiento de la lógica de enunciados es válido si y sólo si el árbol formado a partir de sus premisas y la negación de la conclusión es cerrado. Por lo tanto, si un razonamiento es válido, entonces hay una derivación de la conclusión a partir de sus premisas. Una derivación refleja el proceso de demostrar la validez de un razonamiento. En caso de que alguna rama quede abierta el razonamiento resulta inválido.

Tautologías en el Sistema T

Un enunciado C de LE es una tautología si y sólo si es teorema en T. Esto significa que, en ese caso, el árbol formado a partir de ¬C es un árbol cerrado. El concepto de teorema en T corresponde con el de Tautología tal como fue caracterizado mediante valuaciones booleanas

Debido a que el sistema es adecuado respecto de las valuaciones booleanas, puede observarse que:

(i) un enunciado del lenguaje de enunciados es una tautología, si el árbol formado a partir de su negación es cerrado;

(ii) un enunciado es una contradicción si el árbol formado a partir de él es cerrado;

(iii) un enunciado es una contingencia si tanto árbol formado a partir de él como el árbol formado a partir de su negación tienen ambos al menos una rama abierta.

(iv) Así, los conceptos de teorema en T y tautología son equivalentes.

La lógica de Enunciados es decidible

Esto quiere decir: existe un método mecánico o algoritmo para decidir si un enunciado es tautología o no, o si un razonamiento de enunciados es valido o no.

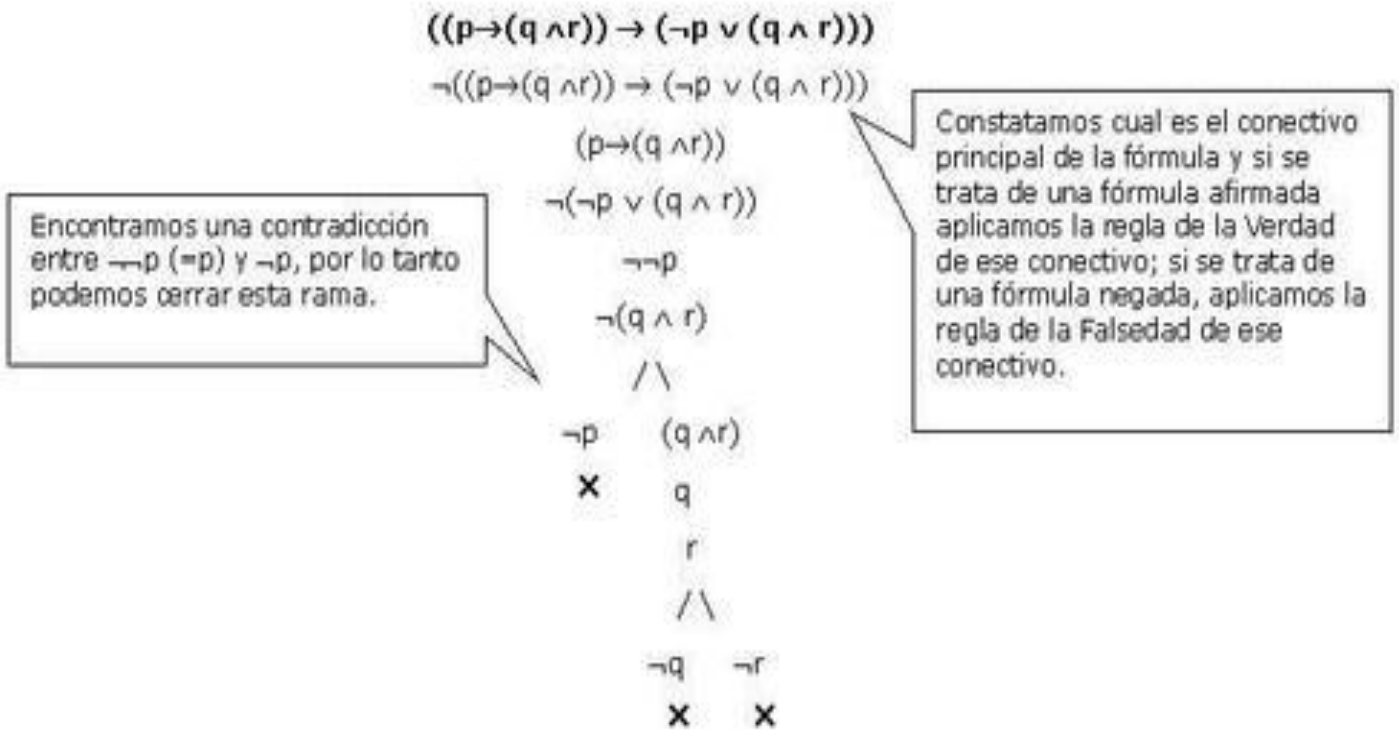
Sistema T nos permite demostrar la decibilidad de la LE.

El método de los arboles -restringido a la lógica de enunciados- es un ejemplo de un algoritmo semejante. Esto es así porque tanto los enunciados como los razonamientos de la lógica de enunciados dan lugar siempre a árboles finitos, es decir, con ramas que tienen un número finito de nodos, de modo que siempre podrá afirmarse, para toda rama, si es abierta o cerrada, y, por lo tanto, para todo árbol, si es abierto o cerrado.

Los árboles del Sistema T siempre son finitos

Cada enunciado del lenguaje de enunciados contiene un número finito de conectivas y toda regla de árboles para las conectivas da lugar a un número finito de ramas, cada una de ellas con un número finito de enunciados, y, finalmente, el conjunto de enunciados que es necesario examinar en la lógica de enunciados es siempre finito.

Veamos un ejemplo y ejercicio



Sistema T* con fórmulas etiquetadas

A fin de construir el sistema se introducirán dos signos más, que se entenderán como “etiquetas” para fórmulas, y que al ser aplicados a las mismas darán lugar a “fórmulas etiquetadas”. Estos son los signos V y F.

El concepto de verdad y los signos lógicos

Al introducir la noción de enunciado se vio que es típico de los enunciados el hecho de que se les puede atribuir verdad o falsedad; tienen lo que se llama un “valor de verdad”: verdadero o falso. Las razones por las cuales un enunciado es rotulado como verdadero o falso son, en principio, externas a la lógica.

Verdad y falsedad como “propiedades” de los enunciados

Lo importante es que verdad y falsedad se ven como propiedades (o “rótulos”) de enunciados, y la caracterización de la noción de validez deductiva tiene consecuencias respecto de la obtención de enunciados verdaderos: en los razonamientos válidos no podrá darse que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

Consistencia

En un conjunto consistente de enunciados nunca podrá ocurrir que un enunciado aparezca una vez con el valor verdadero y otra vez con el valor falso.

Más específicamente, se supondrá además que para todo enunciado A de LE se dará que A es verdadero o A es falso. Esto es lo que se denomina principio de bivalencia, es decir, el principio de que para todo enunciado hay dos valores de verdad, verdadero y falso, y todo enunciado tiene exactamente uno de ellos (ni más ni menos).

Árboles del Sistema T*

Los árboles que se tratarán de ahora en adelante son un tipo particular de grafos (tal como se estudian en la teoría de grafos): son grafos conectados sin ciclos. Serán además árboles binarios, es decir, que sus bifurcaciones generan a lo sumo dos ramas.

En el caso de estos árboles analíticos, se da por sentado que los nodos, es decir, los puntos conectados del árbol son fórmulas cerradas del LE etiquetadas.

Árbol

Un árbol es un conjunto de fórmulas etiquetadas ordenado por una relación (expresada gráficamente por la líneas que unen los enunciados) y en el cual existe un único subconjunto (no vacío) de fórmulas etiquetadas que constituyen el origen de los demás nodos del árbol (el tronco del árbol).

Rama

Una rama es una secuencia numerable de fórmulas etiquetadas que comienza en el tronco y que o bien tiene una fórmula etiquetada final (rama finita) o bien no la tiene (rama infinita).Esto último puede darse en LPO. Como veremos más adelante

Rama cerrada VA y FA

Dada una fórmula cualquiera A, si en una misma rama aparecen VA y FA, entonces se dirá que la rama es una rama cerrada, lo que se indicará marcando con x al extremo de la rama.

Reglas del Sistema T* etiquetadas

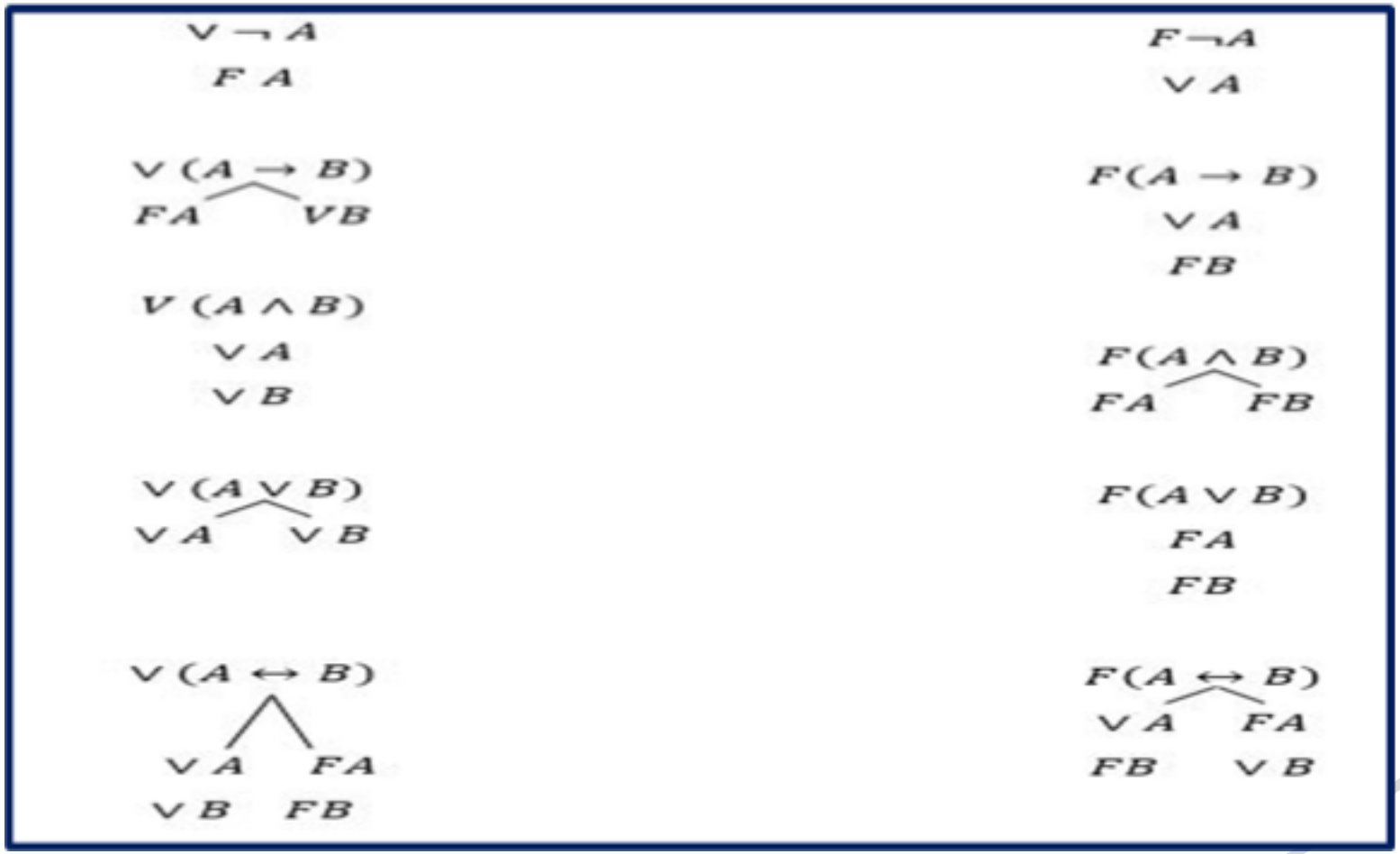


Diagrama de flujo del procedimiento de aplicación de las reglas del sistema T

1. Escríbase en columna las premisas etiquetadas con V y la conclusión etiquetada con F. Los enunciados candidatos a teoremas se toman como un caso especial (se los etiqueta con F).

¿Queda cerrada la rama?

No! ↓

Sí! **Stop!** La conclusión es derivable en T a partir de las premisas (el enunciado es un caso de ley lógica).

2. Aplíquese, si ello es posible, las reglas de T a las fórmulas etiquetadas obtenidas tomando en cuenta las restricciones y las observaciones hechas al presentar las reglas en la sección 3, y siguiendo las reglas prácticas dadas en la sección 4.

↓

3. Luego de cada aplicación de una regla, ciérrese las ramas resultantes que contengan un mismo enunciado **A** etiquetado con V y F, es decir V**A** y F**A**.

¿Quedan cerradas todas las ramas?

No! ↓

Sí! **Stop.** La conclusión es derivable en T a partir de las premisas (el enunciado es un caso de ley lógica).

¿El árbol está terminado?

No! ↓

Sí! **Stop.** La conclusión *no* es derivable en T a partir de las premisas (el enunciado *no* es un caso de ley lógica).

↓

↑

Sistema Correcto

Así como las reglas se basan directamente en las condiciones de verdad para los signos lógicos, el método se basa también en la definición de razonamiento válido basada en el concepto de verdad: un razonamiento es válido si su forma correspondiente carece de contraejemplo, es decir, un ejemplo con premisas verdaderas y conclusión falsa. Esta es la base para considerar al sistema correcto

De conceptos semánticos a un método de derivación

Puede decirse que el sistema de árboles es una transposición de conceptos semánticos a un método de derivación. Así, puede decirse también que el método procede por refutación o por búsqueda de un contraejemplo y puede considerarse como una variante del método por el absurdo.

Sobre las Reglas T*

Las reglas del sistema no son reglas lógicas (reglas de inferencia) en sentido estricto (es decir, en el sentido de formas válidas de razonamiento). En realidad, son reglas para la generación de los árboles de T*. Esto ya se hace evidente desde el momento en que se aplican a enunciados etiquetados y que, en el caso de las reglas que bifurcan, tienen más de una conclusión.

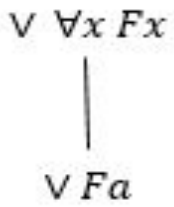
Ciertamente, tienen un significado lógico, pero lo que se sigue de ellas no es por deducciones, sino que se las puede considerar "reglas mínimas" para la conservación de consistencia

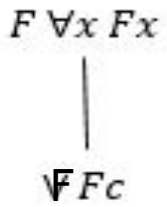
Veamos ejemplos y ejercicios

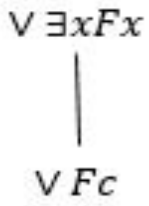
Sistema T* Etiquetado para LPO.

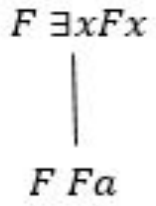
Tiene las mismas Reglas para las conectivas lógicas pero se agregan las Reglas para los Cuantificadores: Universal (∀) y Existencial (∃)

Reglas del sistema T* para Cuantificadores









Adecuación del Sistema T*

Por lo visto anteriormente la derivabilidad en T* refleja la validez de razonamientos, y los teoremas de T* se corresponden con verdades lógicas o casos de leyes lógicas. Si esto llega a ser así, el sistema T* cumple con los objetivos para los cuales fue diseñado: captura todos y únicamente los razonamientos deductivamente válidos

Completitud

El sistema T* consigue capturar todos los razonamientos válidos; no existe un razonamiento válido cuya validez T* no sea capaz de determinar. Esta propiedad recibe el nombre de completitud. Además, vale la pena subrayar que esto es posible mediante un procedimiento efectivo, esto es, computable. Así, esto abre la puerta para automatizar la determinación de validez.

Enunciados Consistentes

Un conjunto de enunciados es consistente si y sólo si el árbol construido a partir de sus miembros, etiquetados todos con V, mediante las reglas del sistema T* tiene al menos una rama abierta.

Concepto de verdad caracterización de la validez

El concepto de verdad ha servido para dar una primera caracterización de la validez de una forma de razonamiento: Una forma de razonamiento es válida si todo caso concreto, todo ejemplo de la misma con premisas verdaderas tiene conclusión verdadera, o, de manera equivalente, si no existe un caso concreto, un ejemplo, con premisas verdaderas y conclusión falsa. Otro tanto ocurría con las leyes lógicos y la consistencia de conjuntos de enunciados. Los árboles analíticos pueden verse, entonces, como una plasmación formal de semejante caracterización.

Semántica – Sintaxis

Debe tenerse en cuenta que el concepto de verdad es un concepto semántico, es decir, tiene que ver con aquello a lo que se refieren las expresiones de la lógica. En el caso de las fórmulas cerradas, esta referencia serían los dos valores de verdad, verdadero y falso. Por el contrario, el sistema T* proporciona una reconstrucción puramente sintáctica de tal idea.

Conclusiones

1. Proporciona una base excelente desde la cual desarrollar una enseñanza de la lógica combinando en las dosis adecuadas claridad y rigor, por así decir. Aunque se han establecido algunos resultados únicamente para lógica clásica, como ya se indicó antes, los árboles semánticos son también aplicables a sus extensiones y alternativas. Qué tipo de lógica deba ser enseñada está en función de determinados factores (tipo de estudios, nivel o curso, etc.) que no hemos contemplado a lo largo de este trabajo.

Conclusiones

2. Por medio de este procedimiento se facilita el aprendizaje de los métodos formales y sus aplicaciones en diversos ámbitos, ya sea en el propio trabajo filosófico (teniendo en cuenta el lenguaje lógico: validez de argumentos, si un conjunto de sentencias es o no consistente, corrección de las reglas de razonamiento, etc.), o en el estudio de la lógica misma (propiedades metalógicas, principalmente corrección y completud).

Conclusiones

3. Se sientan así las bases para las necesarias tareas de reflexión acerca de determinadas ciencias de extraordinario desarrollo en la actualidad (especialmente su metodología, resultados, implicaciones, etc.) como las ciencias de la computación, inteligencia artificial, ciencias cognitivas, lingüística, etc.

Muchas Gracias